

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

- i) α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να προσδιορίσετε τα ακρότατα της.

ii) α) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση $\frac{\alpha \ln x + \beta}{x}$ να είναι αρχική της f .

β) Να βρείτε το $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} E(\kappa)$, όπου $E(\kappa)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τις ευθείες $x = 1$, $x = \kappa > 1$ και τον άξονα $x'x$.

2) i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x+1$.

ii) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^x \geq x+1$, $a > 0$, να αποδείξετε ότι $a = e$.

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x \cdot (x^2 + 2)$, $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2$, την ευθεία $x = 1$ και τον άξονα $y'y$.

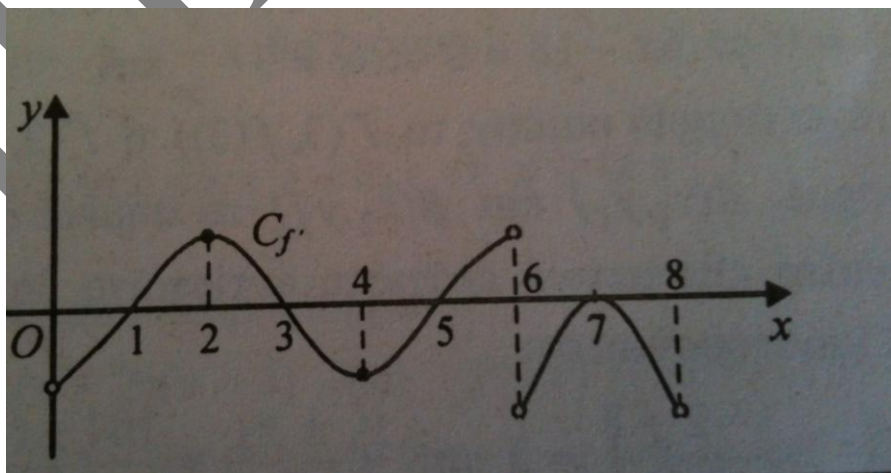
3) i) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \ln x$ στο σημείο $(a, f(a))$ με $a > 1$.

iii) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη (ϵ).

iv) Αν το σημείο $A(a, f(a))$, $a > 1$ απομακρύνεται από τον άξονα $y'y$ με ταχύτητα 2 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου Ω κατά τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη (ϵ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

4) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου κάποιας συνεχούς συνάρτησης στο διάστημα $[0, 8]$.



- α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, καθώς και τις θέσεις των τοπικών ακρότατων. (Με αιτιολόγηση)
 β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τις θέσεις σημείων καμπής. (Με αιτιολόγηση)

5) α) Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $xf'(x) = x + 2f(x)$, $x > 0$

και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, -\frac{3}{4})$. (Απ. $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{4}$)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 5$.

6) α) Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^v x dx$ ν φυσικός, να αποδείξετε ότι για κάθε $v \geq 3$ ισχύει

$$I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$$

β) Να υπολογίσετε το I_3 . (Βλέπε άσκηση 4 Γ ομάδας, Σχολικό σελ. 234)

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε: $12 \leq 26 \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{x dx}{1+x^2} \leq 13$ (βλέπε άσκηση 10 Γ ομάδας σελ. 235)

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x e^{x^2} dt$ x πραγματικός.

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq f(x) \leq xe^{x^2}$ για κάθε $x \geq 0$ (κατασκευαστικά και ολοκλήρωση)

β) Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

α) Να μελετήσετε τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης.

β) Αν $a > 0$ και ισχύει $x^a \leq a^x$ για κάθε $x > 0$ να αποδειχθεί ότι $a = e$.

(συνέπεια του a ερωτ. ή με τη μέθοδο θεώρησης συνάρτησης....)

γ) Να βρείτε ευθεία $x = t > 1$ τέτοια, ώστε το χωρίο Ω_1 που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = e^{-1}$ και $x = 1$ να είναι ισεμβαδικό του χωρίου Ω_2 που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = t$. (Απάντηση $t=e$)

10) Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x, \quad x \text{ πραγματικός. (Θέτουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα}$$

ίσο με c)